

Kajian Kestabilan Model Penyebaran Penyakit *Tuberculosis* Dengan Metode Lyapunov

The Study of Tuberculosis Disease Model Stability Using Lyapunov Method

Astrid Aqila Fadillah^{a,1}, Mardiningsih^{a,2}

^aProgram Studi Sarjana Matematika, Universitas Sumatera Utara, Medan, 20155, Indonesia
astridaqila1314@gmail.com¹, mardiningsih@usu.ac.id²

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji kestabilan model penyebaran penyakit *tuberculosis* di Indonesia menggunakan metode Lyapunov yang dianalisis melalui fungsi Lyapunov. Sekitar 52% kasus *tuberculosis* di Indonesia tidak terdeteksi maupun tidak dilaporkan. Pada penelitian ini diasumsikan bahwa individu yang telah sembuh memiliki kekebalan dalam jangka waktu tertentu untuk dapat kembali menjadi rentan. Data nilai parameter yang digunakan pada penelitian ini berasal dari Profil Kesehatan Indonesia 2021 dan beberapa jurnal lainnya. Kemudian, untuk melihat penyebaran penyakit digunakan bilangan reproduksi yang dibentuk dengan *The Next Generation Matrix*. Selanjutnya juga dilakukan simulasi numerik dengan mencoba beberapa nilai pada parameter vaksin (θ dan ϕ), sehingga diperoleh $R_0 < 1$ yang berarti tidak terjadi penyebaran penyakit *tuberculosis* dan didapatkan bahwa peran vaksinasi cukup signifikan. Untuk melihat kestabilan titik kesetimbangan digunakan metode Lyapunov yang fungsinya dikonstruksi dengan metode variabel gradien. Dari metode tersebut diperoleh sebuah fungsi yang memenuhi teorema Lyapunov yang titik kesetimbangannya bersifat stabil asimtotik. Pada penelitian ini juga dilakukan simulasi menggunakan Odin untuk melihat bagaimana pengaruh dari laju peningkatan (θ) dan penurunan (ϕ) pemberian vaksin.

Kata Kunci : Kestabilan, Metode lyapunov, Nilai reproduksi dasar, Persamaan diferensial, Tuberculosis

ABSTRACT

This research aims to examine the stability of the tuberculosis disease transmission model in Indonesia using the Lyapunov method, analyzed through Lyapunov functions. Approximately 52% of tuberculosis cases in Indonesia go undetected or unreported. In this study, it is assumed that individuals who have recovered have immunity for a certain period, making them susceptible again afterward. Parameter values are sourced from the 2021 Indonesian Health Profile and various other journals. The disease spread is evaluated using the reproduction number formed by *The Next Generation Matrix*. Additionally, numerical simulations are conducted by varying vaccine parameters (θ and ϕ), resulting in $R_0 < 1$, indicating no tuberculosis transmission and highlighting the significant role of vaccination. Stability analysis of equilibrium points is performed using the Lyapunov method, constructing functions through gradient variable methods. The obtained function satisfies the Lyapunov theorem, indicating asymptotic stability of equilibrium points. Simulations using Odin are also conducted to assess the impact of vaccine increase (θ) and decrease (ϕ) rates.

Keywords : Basic reproduction number, Differential equation, Lyapunov method, Stability, Tuberculosis

Info Artikel :

Disubmit: 09 Oktober

Direview: 09 November

Diterima : 20 Desember

Copyright © 2023 - Journal UPU. All rights reserved.

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Terdapat suatu sistem yang dibentuk dari persamaan diferensial, baik sistem persamaan diferensial biasa maupun sistem persamaan diferensial parsial, yaitu sistem

dinamik. Dalam matematika, sistem dinamik bertujuan untuk mendeskripsikan kestabilan suatu sistem yang keadaannya dipengaruhi oleh waktu.

Pada penelitian [1] yang berjudul “Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit *Tuberculosis* dengan Laju Infeksi Tersaturasi” menghasilkan bahwa pengobatan pada kompartemen individu terinfeksi diketahui lebih efektif dari pada pengobatan pada individu laten. Kemudian, berdasarkan penelitian [2] tentang fungsi Lyapunov yang berjudul “Analisis Kestabilan Global Model Penyebaran Penyakit Meningitis Dengan Menggunakan Fungsi Lyapunov” menghasilkan adanya pengurangan jumlah individu pada sub-populasi terinfeksi apabila dilakukan vaksinasi atau pengobatan hingga mencapai kurang dari 10 individu per 1000 populasi.

Menurut *Global Tuberculosis Report 2021* [3], diestimasikan ada 824.000 kasus *tuberculosis* di Indonesia, namun pasien *tuberculosis* yang berhasil ditemukan, diobati, dan dilaporkan ke dalam sistem informasi nasional hanya sekitar 48% atau 393.323 orang. Masih ada sekitar 52% kasus *tuberculosis* yang belum ditemukan atau sudah ditemukan namun belum dilaporkan. Sehingga pada tahun 2022 melalui acara “Indonesia Tuberculosis – International Meeting”, Menteri Kesehatan, Budi Gunadi Sadikin meminta pada tahun 2024 sebanyak 90% penderita *tuberculosis* harus sudah terdeteksi. Indonesia berkomitmen agar dapat mencapai eliminasi *tuberculosis* dengan target *incident rate* sebesar 65/100.000 penduduk serta angka kematian sebesar 6/100.000 penduduk.

2. METODE

A. Persamaan Diferensial

Definisi 1

Persamaan diferensial adalah sebuah persamaan yang mengandung turunan dari satu atau lebih variabel dependen terhadap satu atau lebih variabel independennya. Menurut [4], secara simbol persamaan diferensial berorde n dapat dinyatakan dengan

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Keterangan:

- x adalah variabel independen,
- y adalah variabel dependen,
- $y', y'', \dots, y^{(n)}$ adalah turunan-turunan y terhadap x .

Definisi 2

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang hanya terdiri dari satu peubah bebas. Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa ditulis

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^{(2)}y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{(n)}y}{dx^n}\right) = 0 \quad (2)$$

Definisi 3 [5]

Sistem persamaan diferensial merupakan suatu sistem yang memiliki n buah persamaan diferensial, dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, dengan $n = 2, 3, \dots, \infty$. Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling keterkaitan. Bentuk umum dari sistem persamaan diferensial berorde n ialah

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (3)$$

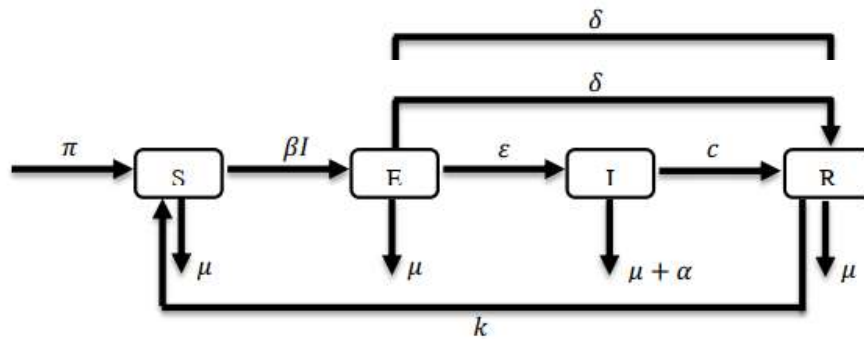
dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan $\frac{dx_i}{dt}$ adalah turunan dari fungsi x_i terhadap t .

Definisi 4 [6]

Sistem persamaan diferensial dikatakan nonlinier apabila sistem tersebut terdiri dari dua atau lebih persamaan nonlinier yang saling terkait.

B. Model SEIRS

Berdasarkan penelitian [7], populasi penyebaran penyakit *tuberculosis* dibagi menjadi 4 subpopulasi, yaitu *susceptible* atau *S* (jumlah individu yang rentan terhadap *tuberculosis*), *exposed* atau *E* (jumlah individu yang terinfeksi, tapi tidak dapat menularkan), *infected* atau *I* (jumlah individu yang terinfeksi dan dapat menularkan) dan *recovered* atau *R* (jumlah individu yang telah sembuh dari *tuberculosis*). Dalam penelitian ini akan diasumsikan bahwa individu yang telah sembuh dapat kembali ke kompartemen *susceptible* apabila hilangnya kekebalan tubuh. Kompartemen untuk model ini dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Kompartemen Model SEIRS

Berdasarkan kompartemen di atas, diperoleh model

$$\frac{dS(t)}{dt} = \pi + kR - (\mu + \beta I)S \quad (4)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta IS - (\mu + \varepsilon + \delta)E \quad (5)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \varepsilon E - (\mu + \alpha + c)I \quad (6)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = cI + \delta E - (\mu + k)R \quad (7)$$

Keterangan:

- π = Laju kelahiran
- μ = Laju kematian alami
- βI = Laju penularan dari individu terinfeksi kepada individu rentan
- ε = Laju inkubasi
- c = Laju kesembuhan
- δ = Laju kesembuhan dari kompartemen *exposed*
- α = Laju kematian akibat *tuberculosis*
- k = Laju kehilangan kekebalan

C. Titik Keseimbangan

Keadaan setimbang dari suatu sistem berbeda-beda. Suatu sistem setimbang pada sebuah titik yang disebut titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan adalah suatu titik saat sistem tidak mengalami perubahan sepanjang waktu [8]. Kestabilan dalam metode Lyapunov dianalisis melalui titik kesetimbangannya.

Definisi 5 [7]

Misal diberikan persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Titik $\bar{x}$ disebut titik kesetimbangan jika $f(\bar{x}) = 0$.

D. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Besaran R_0 adalah jumlah ekspektasi dari kasus sekunder yang dihasilkan dari satu individu terinfeksi ketika Ia masuk dalam sebuah populasi yang semuanya sehat. Dengan kata lain, bilangan reproduksi dasar adalah jumlah infeksi baru yang dihasilkan dari satu individu terinfeksi dalam populasi. Secara umum, kondisi yang memungkinkan dari bilangan reproduksi dasar ialah [9]

- 1) jika $R_0 < 1$, maka jumlah individu yang terinfeksi akan menurun pada setiap generasi, sehingga penyakit akan menghilang
- 2) jika $R_0 > 1$, maka jumlah individu yang terinfeksi akan meningkat pada setiap generasi, sehingga penyakit akan meningkat dan mewabah.

Bilangan reproduksi dasar dapat dihitung dengan membagi laju infeksi terhadap laju individu menuju kompartemen sembuh (R). Bilangan reproduksi dasar atau nilai ambang batas epidemi dapat ditentukan melalui The Next Generation Matrix (NGM) yang dikonstruksi dari kelompok individu terinfeksi. Metode NGM memisahkan sistem yang terinfeksi menjadi 2 matriks yaitu laju transmisi (E) dan laju transisi (I) dari kompartemen yang terlibat. Kedua matriks tersebut selanjutnya dilambangkan dengan T dan Σ . Sehingga, untuk proses linearisasi dapat ditulis dengan

$$\dot{X} = (T - \Sigma)X \quad (8)$$

dengan X adalah matriks dari kompartemen yang terlibat. Sementara R_0 dapat dicari dengan menghitung radius spektral (ρ) dari matriks FV^{-1} [10] yang secara matematis dapat ditulis seperti persamaan (9).

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) \quad (9)$$

dengan F dan V adalah turunan parsial T dan $-\Sigma$ terhadap X . Radius spektral dari FV^{-1} didefinisikan sebagai

$$\rho(FV^{-1}) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(FV^{-1})\}$$

dimana $\sigma(FV^{-1})$ adalah spektrum dari FV^{-1} [11].

E. Metode Lyapunov

Metode Lyapunov adalah salah satu metode yang digunakan untuk menganalisis kestabilan suatu sistem dinamik. Untuk menganalisis sistem dibutuhkan fungsi Lyapunov. Fungsi Lyapunov digunakan untuk membuktikan keberadaan titik kesetimbangan dan menentukan sifat stabilitasnya.

Definisi 6 [8]

Diberikan fungsi $L: \mathcal{D} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dan $\bar{x} \in \mathcal{D}$ titik kesetimbangan sistem persamaan diferensial nonlinier. Fungsi L disebut fungsi Lyapunov jika memenuhi pernyataan berikut:

- 1) fungsi L kontinu dan mempunyai turunan parsial pertama pada $\mathcal{D}$.
- 2) fungsi $L(x) > 0$ (definit positif) untuk $x \in \mathcal{D}$ dengan $x \neq \bar{x}$ dan $L(\bar{x}) = 0$ dengan $x = x_e$ (dengan titik kesetimbangan $\bar{x}$ merupakan titik minimum global).
- 3) fungsi $\dot{L}(x) \leq 0$ (semidefinit negatif) $\forall x \in \mathcal{D}$.

Teorema 1 [12]

Misal $\bar{x} \in W$ adalah titik kesetimbangan dari

$$x' = f(x) \quad (10)$$

dimana $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$. Misal $L: U \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu pada sebuah *neighbourhood* $U \subset W$ dari $\bar{x}$, terdiferensiasi pada $U - \bar{x}$, seperti berikut

- 1) $L(\bar{x}) = 0$ dan $L(x) > 0$ jika $x \neq \bar{x}$;
- 2) $\dot{L} \leq 0$ pada $U - \bar{x}$.

Maka $\bar{x}$ adalah stabil. Apabila syarat 2) tidak terpenuhi, tetapi fungsinya memenuhi syarat berikut

- 3) $\dot{L} < 0$ pada $U - \bar{x}$,

maka $\bar{x}$ adalah stabil asimtotik.

F. Metode Variabel Gradien

Metode variabel gradien adalah sebuah pendekatan yang sering digunakan untuk membangun fungsi Lyapunov. Hubungan suatu fungsi skalar $L(x)$ dengan gradiennya adalah

$$L(x) = \int_0^x \Delta L(x) dx$$

dimana

$$\Delta L = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

Gradien ΔL dari fungsi Lyapunov digunakan untuk mencari turunan fungsi Lyapunov, yaitu

$$\dot{L} = (\Delta L)\dot{X} \quad (12)$$

dengan $\dot{L}$ definit negatif.

Agar fungsi skalar L yang diperoleh adalah tunggal, maka fungsi gradiennya haruslah memenuhi kondisi *curl* sebagai berikut

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_j} = \frac{\partial L_j}{\partial x_i}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n \text{ dan } i \neq j) \quad (13)$$

dimana $i \neq j$.

G. Tuberculosis

Tuberculosis merupakan sebuah penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *myobacterium tuberculosis*. Penyakit ini menyerang paru-paru, namun dapat menyerang anggota tubuh lain, seperti sistem saraf pusat, sistem limfatik, dan ginjal. Bakteri akan ditangkal oleh kekebalan tubuh seorang individu, namun akan aktif kembali apabila keadaan imun sedang lemah.

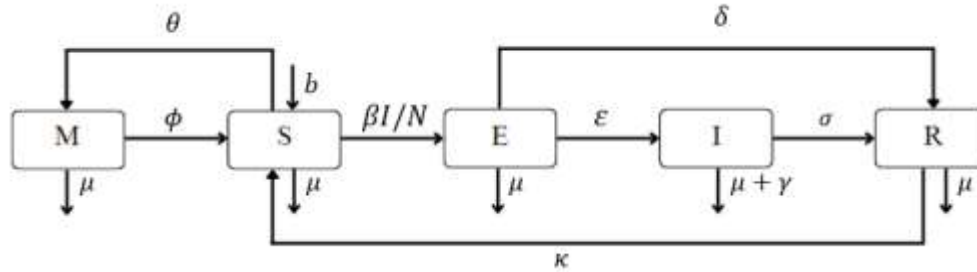
Tuberculosis dapat dicegah dengan pemberian vaksin BCG (*Bacillus Calmette Guerin*) pada saat anak berusia satu bulan yang biasanya diberikan bersamaan dengan imunisasi polio 1. Pemberian vaksin BCG sudah menjadi program imunisasi WHO sejak tahun 1960-an. Berdasarkan penelitian [13], efektivitas dari vaksin BCG sebesar 85%. Anak yang tidak divaksinasi BCG berisiko terkena *tuberculosis* sebesar 6,87 kali lebih tinggi daripada yang divaksinasi.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Kajian Kestabilan Model

Dalam penelitian ini dibutuhkan 5 variabel yaitu M (jumlah individu yang berada pada kompartemen kekebalan pasif), S (jumlah populasi yang rentan terhadap *tuberculosis*), E (jumlah individu yang terinfeksi, tapi tidak dapat menularkan), I (jumlah individu yang terinfeksi dan dapat menularkan), dan R (jumlah individu yang telah sembuh dari *tuberculosis*). Variabel-variabel tersebut dipengaruhi oleh berbagai parameter yaitu b (laju kelahiran), μ (laju kematian alami), ϕ (laju penurunan pemberian vaksin), θ (laju peningkatan pemberian vaksin pada bayi), βI (laju perpindahan dari S ke E), ε (laju

perpindahan dari E ke I), σ (laju perpindahan dari I ke R), δ (laju perpindahan dari E ke R), γ (laju kematian akibat *tuberculosis*), dan κ (laju kehilangan kekebalan)



Gambar 2. Kompartemen Model MSEIRS

Berikut merupakan keterangan dari Gambar 2.

- 1) Individu yang lahir akan masuk ke kompartemen S. Apabila individu tersebut diberi vaksin, maka dapat berpindah ke kompartemen M. Namun, efektivitas vaksin dapat berkurang pada individu tertentu yang menyebabkan individu tersebut dapat kembali ke kompartemen S.
- 2) Dari kompartemen S, individu dapat mengalami kematian alami ataupun berpindah ke kompartemen E.
- 3) Pada kompartemen E terdapat 3 kemungkinan, yaitu individu mengalami kematian alami, berpindah ke R ataupun ke I terlebih dahulu.
- 4) Individu yang telah terinfeksi (I) dapat mengalami kematian alami ataupun kematian akibat *tuberculosis*. Apabila telah sembuh, maka individu dapat berpindah ke kompartemen R.
- 5) Melalui kompartemen terakhir yaitu R, individu dapat mengalami kematian alami ataupun penurunan kekebalan sehingga kembali menjadi rentan.

Model yang diperoleh dari Gambar 2 dapat dilihat pada persamaan (14) sampai (18).

$$\frac{dM(t)}{dt} = \theta S - (\phi + \mu)M \quad (14)$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = \phi M + b + \kappa R - \left(\theta + \mu + \frac{\beta I}{N} \right) S \quad (15)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\mu + \varepsilon + \delta)E \quad (16)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \varepsilon E - (\mu + \gamma + \sigma)I \quad (17)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \sigma I + \delta E - (\mu + \kappa)R \quad (18)$$

B. Titik Keseimbangan

Pada titik kesetimbangan bebas penyakit diasumsikan tidak ada jumlah yang terinfeksi atau $I = 0$, sehingga titik kesetimbangannya ialah

$$E_0 = \left(\frac{\theta S}{\phi + \mu}, \frac{b}{\theta + \mu - \frac{\phi \theta}{\phi + \mu}}, 0, 0, 0 \right).$$

Sementara titik kesetimbangan endemi yaitu ketika $I \neq 0$. Diasumsikan $I = 1$, sehingga titik kesetimbangan endeminya ialah

$$E_1 = \left(\begin{array}{c} \frac{\theta S}{\phi + \mu}, \frac{b + \kappa R}{\theta + \mu + \frac{\beta}{N} - \frac{\phi\theta}{\phi + \mu}}, \frac{\beta \left(\frac{b + \kappa R}{\theta + \mu + \frac{\beta}{N} - \frac{\phi\theta}{\phi + \mu}} \right)}{N(\mu + \varepsilon + \delta)}, \\ \frac{\beta \varepsilon \left(\frac{b + \kappa R}{\theta + \mu + \frac{\beta}{N} - \frac{\phi\theta}{\phi + \mu}} \right)}{N(\mu + \varepsilon + \delta)(\mu + \gamma + \sigma)}, \frac{\beta \left(\frac{b + \kappa R}{\theta + \mu + \frac{\beta}{N} - \frac{\phi\theta}{\phi + \mu}} \right)}{N(\mu + \varepsilon + \delta)(\mu + \kappa)} \left(\frac{\sigma \varepsilon}{(\mu + \gamma + \sigma)} + \delta \right) \end{array} \right).$$

C. Nilai Reproduksi Dasar (R_0)

Nilai R_0 akan dicari menggunakan *The Next Generation Matri*. Kompartemen yang digunakan ialah kompartemen yang melibatkan individu terinfeksi, yaitu E dan I . Dari persamaan (14) – (18) diperoleh laju transmisi $T = \left(\frac{\beta SI}{N}, 0 \right)$ dan laju transisi $-\Sigma = ((\mu + \varepsilon + \delta)E, \varepsilon E - (\mu + \gamma + \sigma)I)$. Selanjutnya akan dicari turunan parsial dari T terhadap X yang dilambangkan dengan F . Sehingga diperoleh

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta b}{\left(\theta + \mu - \frac{\phi\theta}{\phi + \mu} \right) N} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$V = \begin{pmatrix} \mu + \varepsilon + \delta & 0 \\ -\varepsilon & \mu + \gamma + \sigma \end{pmatrix} \quad (20)$$

Selanjutnya dapat dihitung nilai reproduksi dasarnya dengan yaitu $R_0 = \rho(FV^{-1})$. Misal $A = FV^{-1}$, sehingga

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\beta b \varepsilon}{\left(\theta + \mu - \frac{\phi\theta}{\phi + \mu} \right) (\mu + \varepsilon + \delta) (\mu + \gamma + \sigma) N} - \lambda & \frac{1}{\left(\theta + \mu - \frac{\phi\theta}{\phi + \mu} \right) (\mu + \gamma + \sigma) N} \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda \left(\lambda - \frac{\beta b \varepsilon}{\left(\theta + \mu - \frac{\phi\theta}{\phi + \mu} \right) (\mu + \varepsilon + \delta) (\mu + \gamma + \sigma) N} \right) = 0$$

diperoleh nilai *eigen* sebagai berikut:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta b \varepsilon}{\left(\theta + \mu - \frac{\phi\theta}{\phi + \mu} \right) (\mu + \varepsilon + \delta) (\mu + \gamma + \sigma) N}$$

Dapat dilihat bahwa nilai *eigen* maksimumnya ialah λ_2 . Sehingga nilai reproduksi dasarnya

$$R_0 = \frac{\beta b \varepsilon}{\left(\theta + \mu - \frac{\phi\theta}{\phi + \mu} \right) (\mu + \varepsilon + \delta) (\mu + \gamma + \sigma) N} \quad (21)$$

D. Konstruksi Fungsi Lyapunov

Dalam menentukan kestabilan titik kesetimbangan dapat digunakan metode Lyapunov yang akan dianalisis melalui fungsi Lyapunov, yakni akan dicari fungsi gradien dari persamaan (14) sampai (18) dapat dibentuk fungsi gradiennya dengan $x_n = (M, S, E, I, R)$ sebagai berikut:

$$\Delta L = \begin{bmatrix} a_{11}M + a_{12}S + a_{13}E + a_{14}I + a_{15}R \\ a_{21}M + a_{22}S + a_{23}E + a_{24}I + a_{25}R \\ a_{31}M + a_{32}S + a_{33}E + a_{34}I + a_{35}R \\ a_{41}M + a_{42}S + a_{43}E + a_{44}I + a_{45}R \\ a_{51}M + a_{52}S + a_{53}E + a_{54}I + a_{55}R \end{bmatrix} \quad (22)$$

Selanjutnya dapat dicari turunan dari fungsi Lyapunov menggunakan persamaan (12). Turunan tersebut harus memenuhi kondisi *curl*. $\dot{L}$ yang memenuhi kondisi *curl* ialah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{L} = & -M^2(a_{11}\phi + a_{11}\mu) - S^2\left(-a_{12}\theta + a_{22}\theta + a_{22}\mu + \frac{a_{22}\beta I}{N} - \frac{a_{23}\beta I}{N}\right) \\ & -E^2(a_{33}\mu + a_{33}\varepsilon + a_{33}\delta - a_{35}\delta) - I^2(a_{44}\mu + a_{44}\gamma + a_{44}\sigma - a_{45}\sigma) \\ & -R^2(-a_{25}\kappa + a_{55}\mu - a_{55}\kappa) - MS(-a_{11}\theta + a_{12}\phi + a_{12}\mu - a_{22}\phi) \\ & -ME(a_{13}\phi + a_{13}\mu - a_{23}\phi + a_{13}\mu + a_{13}\varepsilon + a_{13}\delta - a_{14}\varepsilon - a_{15}\delta) \\ & -MI(a_{14}\phi + a_{14}\mu - a_{24}\phi + a_{14}\mu + a_{14}\gamma + a_{14}\sigma - a_{15}\sigma) \\ & -MR(a_{15}\phi + a_{15}\mu - a_{25}\phi + a_{15}\mu + a_{15}\kappa) \\ & -SE(a_{23}\theta + a_{23}\mu + a_{23}\mu + a_{23}\varepsilon + a_{23}\delta - a_{24}\varepsilon) \\ & -SI(-a_{14}\theta + a_{24}\theta + a_{24}\mu + a_{24}\mu + a_{24}\gamma + a_{24}\sigma - a_{25}\sigma) \\ & -SR(-a_{15}\theta - a_{22}\kappa + a_{25}\theta + a_{25}\mu + a_{25}\mu + a_{25}\kappa) \\ & -EI(a_{34}\mu + a_{34}\varepsilon + a_{34}\delta - a_{44}\varepsilon - a_{35}\sigma - a_{45}\delta) \\ & -ER(a_{23}\kappa + a_{35}\mu + a_{35}\varepsilon + a_{35}\delta - a_{45}\varepsilon + a_{35}\mu - a_{35}\kappa - a_{55}\mu) \\ & -IR(-a_{24}\kappa + a_{45}\mu - a_{45}\gamma + a_{45}\sigma + a_{45}\mu - a_{55}\sigma - a_{55}\delta) \\ & -M\left(a_{12}b + a_{12}\frac{\beta I}{N} - a_{13}\frac{\beta I}{N}\right) - S\left(a_{22}b + \frac{a_{24}\beta I}{N} - \frac{a_{34}\beta I}{N}\right) \\ & -E\left(a_{23}b - a_{33}\frac{\beta I}{N}\right) - I(a_{24}b) - R\left(a_{25}b + a_{25}\frac{\beta I}{N} - a_{35}\frac{\beta I}{N}\right) \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema 1, turunan L atau $\dot{L}$ bernilai lebih dari 0 agar memenuhi fungsi Lyapunov. Setelah diberikan syarat tersebut diperoleh koefisien-koefisien a_{ij} yang akan disubstitusikan ke dalam persamaan (22).

$$\Delta L = \begin{bmatrix} M + 0.5S + 0.3E + 0.3I + R \\ 0.5M + S + E + 0.5I + 0.5R \\ 0.3M + S + 0.5E + 0.3I + 0.3R \\ 0.3M + 0.5S + 0.3E + 0.25I + 0.3R \\ M + 0.5S + 0.3E + 0.3I + 0.3R \end{bmatrix} \quad (23)$$

Sehingga fungsi Lyapunov yang diperoleh ialah

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}\left(M^2 + S^2 + \frac{E^2}{2} + \frac{I^2}{4} + \frac{R^2}{3}\right) + 0.6(ME + MI + EI + ER + IR) + 2(MR \\ & + SE) + MS + SI + SR > 0 \end{aligned}$$

E. Simulasi Model

Model pada persamaan (14) sampai (18) akan disimulasikan menggunakan Odin. Nilai dari parameter diambil dari data pada [14], [15], dan [7].

Tabel 1. Data Penyebaran Penyakit *Tuberculosis* di Indonesia
Sumber: Profil Kesehatan Indonesia 2021

No.	Data	Nilai	Satuan
1	Jumlah populasi (N)	272.248.500	Jiwa
2	Jumlah terpapar (E)	3.924.454	Jiwa
3	Jumlah terinfeksi (I)	397.377	Jiwa
4	Jumlah sembuh (R)	67.575	Jiwa
5	Angka harapan hidup	71,97	Tahun
6	Jumlah kelahiran	4.438.141	Jiwa
7	Jumlah kematian seluruhnya	22.257	Jiwa
8	Jumlah kematian akibat <i>tuberculosis</i>	14.148	Jiwa
9	Masa inkubasi	0,25	Tahun

Tabel 2. Nilai Estimasi Parameter

Parameter	Keterangan	Sumber	Nilai
b	Laju kelahiran	Jumlah kelahiran/jumlah populasi	0,0163018
μ	Laju kematian alami	1/angka harapan hidup	0,01389468
ϕ	Laju penurunan pemberian vaksin	[15]	[0,1]
θ	Laju peningkatan pemberian vaksin	[15]	[0,1]
βI	Laju perpindahan dari S ke E	Jumlah terpapar (E) /jumlah populasi	0,01441
ε	Laju perpindahan dari E ke I	1/masa inkubasi	4
σ	Laju perpindahan dari I ke R	[7]	0,167
δ	Laju perpindahan dari E ke R	[7]	0,5
γ	Laju kematian akibat <i>tuberculosis</i>	[7]	0,362
κ	Laju kehilangan kekebalan setelah sembuh (R ke S)	[7]	0,004

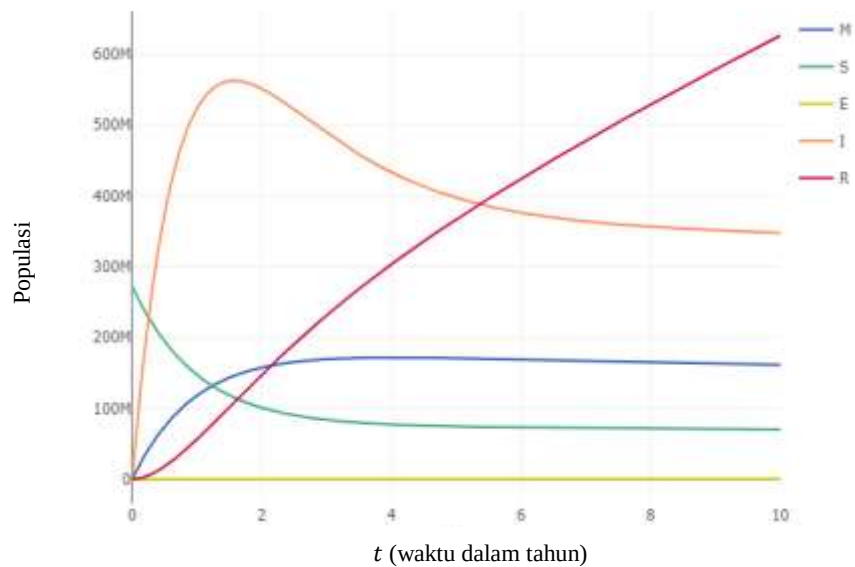
Selanjutnya dapat dicari nilai R_0 berdasarkan parameter dari Tabel 2 yang disubstitusikan ke persamaan (21). Diasumsikan terdapat 5 kondisi untuk parameter θ dan ϕ .

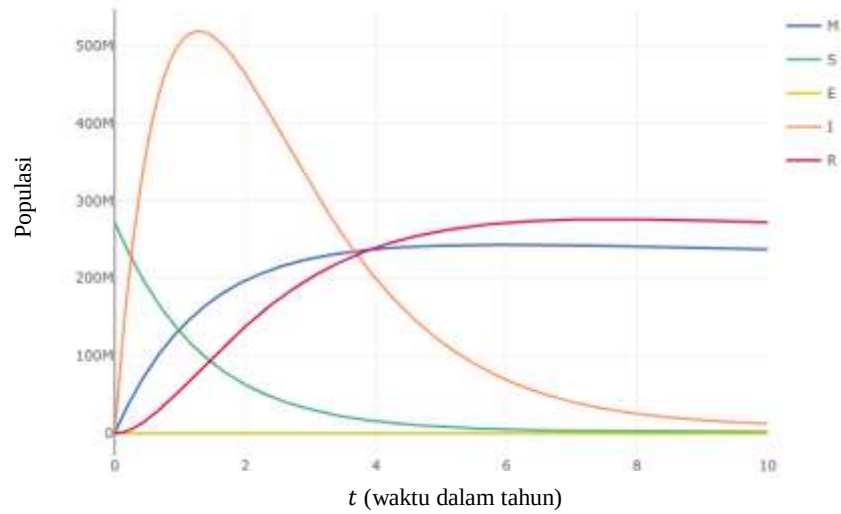
Tabel 3. Nilai Reproduksi Dasar (R_0)

θ	ϕ	R_0
0,7	0,3	0,0129229806
0,7	0	0,0031056728
0,3	0,7	0,1123524767
1	0	0,0021867393
0	1	0,1595663642

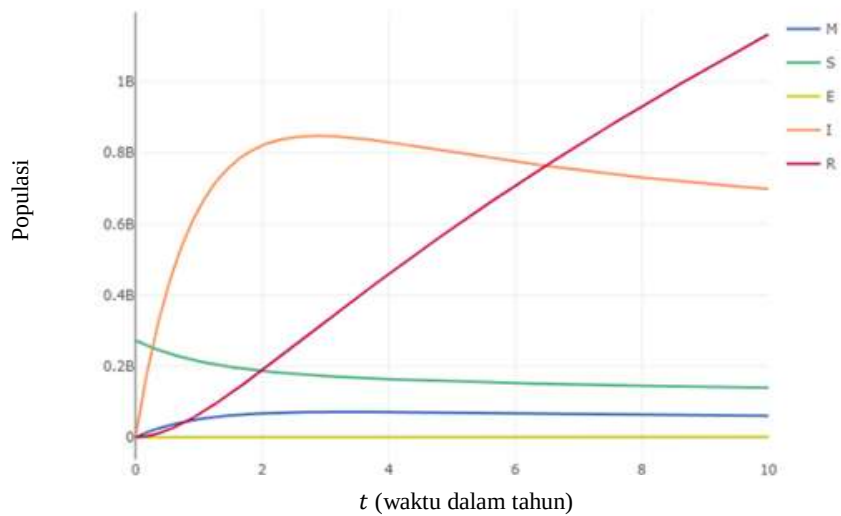
Dari perhitungan di atas diperoleh $R_0 < 1$ yang artinya tidak terjadi penyebaran pada penyakit ini ataupun penyakit tidak mewabah.

Setelah itu akan dilakukan simulasi dengan Odin untuk memperoleh grafik dari persamaan (14) sampai (18) dengan menyubstitusikan nilai parameter pada tabel 2 ke persamaan-persamaan tersebut. Sumbu x didefinisikan sebagai waktu dari penyebaran penyakit, sementara sumbu y didefinisikan sebagai jumlah populasi.

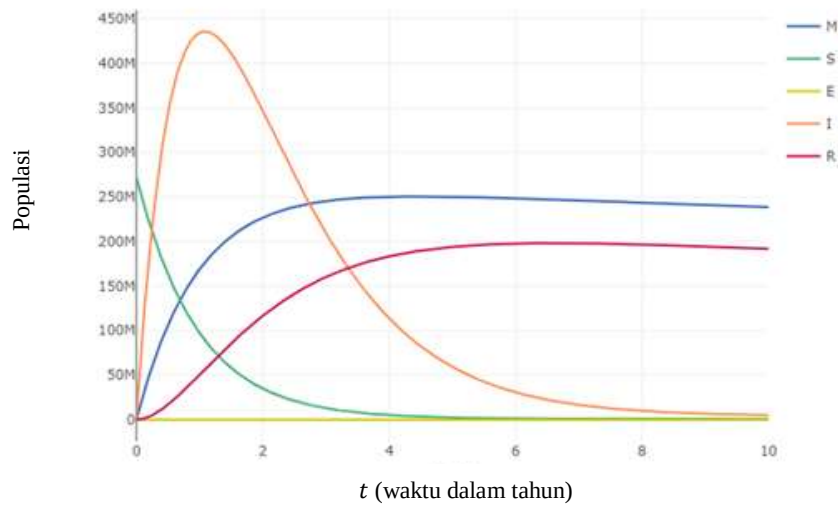
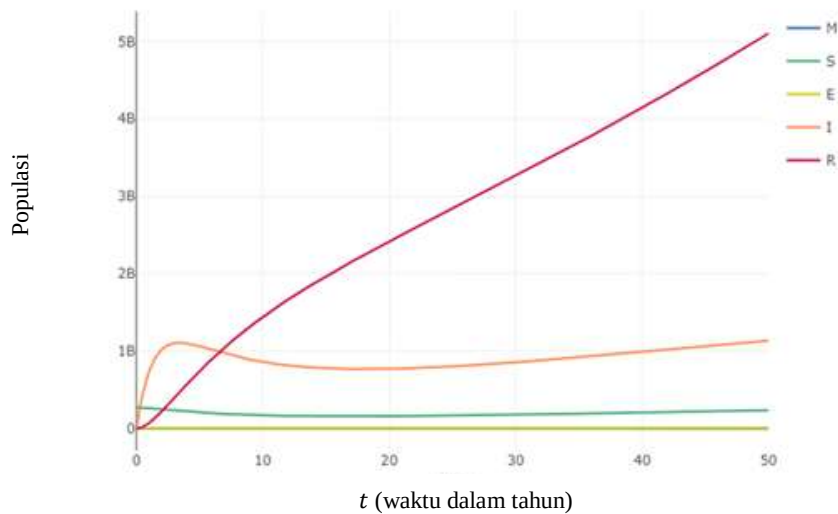
Gambar 3. $\theta = 0,7; \phi = 0,3$



Gambar 4. $\theta = 0,7; \phi = 0$



Gambar 5. $\theta = 0,3; \phi = 0,7$

Gambar 6. $\theta = 1; \phi = 0$ Gambar 7. $\theta = 0; \phi = 1$

4. KESIMPULAN

Model penyebaran penyakit *tuberculosis* yang diperoleh dari penelitian ini ialah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dM(t)}{dt} &= \theta S - (\phi + \mu)M \\ \frac{dS(t)}{dt} &= \phi M + b + \kappa R - \left(\theta + \mu + \frac{\beta I}{N}\right)S \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - (\mu + \varepsilon + \delta)E\end{aligned}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \epsilon E - (\mu + \gamma + \sigma)I$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \sigma I + \delta E - (\mu + \kappa)R$$

Dari model tersebut, dibentuk R_0 yang ketika parameter-parameternya disubstitusi menghasilkan $R_0 < 1$ yang berarti tidak terjadi penyebaran penyakit *tuberculosis* di Indonesia. Sehingga diperoleh untuk $\theta = 0,7$ dan $\phi = 0,3 \rightarrow R_0 = 0,0129229806$; $\theta = 0,7$ dan $\phi = 0 \rightarrow R_0 = 0,0031056728$; $\theta = 0,3$ dan $\phi = 0,7 \rightarrow R_0 = 0,1123524767$; $\theta = 1$ dan $\phi = 0 \rightarrow R_0 = 0,0021867393$; $\theta = 0$ dan $\phi = 1 \rightarrow R_0 = 0,1595663642$. Berdasarkan nilai R_0 dan grafik yang diperoleh dapat dilihat bahwa peran vaksin untuk *tuberculosis* sangat besar.

Kemudian dengan metode variabel gradien terbentuk fungsi berikut

$$L = \frac{1}{2} \left(M^2 + S^2 + \frac{E^2}{2} + \frac{I^2}{4} + \frac{R^2}{3} \right) + 0.6(ME + MI + EI + ER + IR) + 2(MR + SE) + MS + SI + SR$$

yang sifatnya memenuhi teorema 1. Sehingga dapat dikatakan bahwa L adalah fungsi Lyapunov dan titik kesetimbangannya bersifat stabil asimtotik.

Pada penelitian ini dilakukan konstruksi R_0 menggunakan *The Next Generation Matrix* dan fungsi Lyapunov menggunakan metode variabel gradien. Penulis menyarankan agar pada penelitian selanjutnya dapat dikaji dengan menggunakan metode yang lain.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terimakasih kepada seluruh pihak yang membantu proses penelitian ini, yaitu kepada Bapak dan Ibu dosen Program Studi Sarjana Matematika FMIPA USU, keluarga serta teman-teman penulis.

REFERENSI

- [1] H. L. Saputra, S. Sutimin, and S. Sutrisno, "Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis Dengan Laju Infeksi Tersaturasi (Stability Analysis of Tuberculosis Spread Diseases Model Considering Saturated Infection Rate)," *J. Mat. Thales*, vol. 2, no. 1, 2020, doi: 10.22146/jmt.51490.
- [2] I. Afifah, H. Helmi, and E. Noviani, "Analisis Kestabilan Global Model Penyebaran Penyakit Meningitis Dengan Menggunakan Fungsi Lyapunov," *Bimaster Bul. Ilm. Mat. Stat. dan Ter.*, vol. 8, no. 4, pp. 829–838, 2019, doi: 10.26418/bbimst.v8i4.36494.
- [3] T. Theodoridis and J. Kraemer, *Global Tuberculosis Report 2022*. Geneva: World Health Organization, 2022.
- [4] M. R. Zill, D. G. & Cullen, *Differential Equations With Boundary-Value Problems*, vol. 67, no. C. 1975. doi: 10.1016/S0079-8169(08)62168-6.
- [5] V. A. Fitria, "Model Matematika Terhadap Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Rumah Sakit Paru Batu," *J. Ilm. Teknol. Inf. Asia*, vol. 5, no. 2, pp. 60–67, 2011.
- [6] R. C. Boyce, W. E. & DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. 7th Edition*. 2016.
- [7] Syam, R., "Model SEIRS Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar," *J. Math. Comput. Stat.*, vol. 3, no. 1, p. 11, 2021, doi: 10.35580/jmathcos.v3i1.19180.
- [8] R. Sundari and E. Apriliani, "Konstruksi Fungsi Lyapunov untuk Menentukan Kestabilan," *J. Sains dan Seni ITS*, vol. 6, no. 1, pp. 1–5, 2017, doi: 10.12962/j23373520.v6i1.22862.
- [9] K. Kasbawati, "Penentuan Nilai R_0 dengan Menggunakan Operator The Next Generation," *J. Mat. Stat. dan Komputasi*, vol. 6, no. 1, pp. 56–64, 2009.
- [10] Z. Shuai and P. Van Den Driessche, "Global stability of infectious disease models using lyapunov

- functions,” *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 73, no. 4, pp. 1513–1532, 2013, doi: 10.1137/120876642.
- [11] O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek, and M. G. Roberts, “The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models,” *J. R. Soc. Interface*, vol. 7, no. 47, pp. 873–885, 2010, doi: 10.1098/rsif.2009.0386.
- [12] Morris W. Hirsch and Stephen Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. London: Academic Press, Inc, 1974.
- [13] A. M. Lestari, P. Widyaningsih, and S. Sutanto, “Model Susceptible Vaccinated Infected Treatment Recovered Dengan Kasus Kambuh Dan Penerapannya (Kasus Tuberkulosis Di Indonesia),” *BAREKENG J. Ilmu Mat. dan Terap.*, vol. 15, no. 4, pp. 667–674, 2021, doi: 10.30598/barekengvol15iss4pp667-674.
- [14] Kemenkes RI, *Profil Kesehatan Indonesia 2021*. 2022.
- [15] D. Roudhotillah and T. D. Chandra, “Analisis kestabilan model penyebaran penyakit tuberkulosis dengan menggunakan mseitr,” *Wahana Mat. dan Sains J. Mat. Sains, dan Pembelajarannya*, vol. 15, no. 2, pp. 56–74, 2021, [Online]. Available: <https://ejournal.undiksha.ac.id/index.php/JPM/article/view/34503>